SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$2x - y + z = 1$$

$$x + y - z = 2$$

$$x - y + z = 0$$

SOLUCION MATRICIAL

$$x + y - z = 0$$
$$x + 2y + z = 5$$
$$x + y + z = 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

MATRIZ AUMENTADA

SOLUCION

SISTEMA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \longrightarrow \\ F_3 - F_1 \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ y + 2z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

SUSTITUCION REGRESIVA

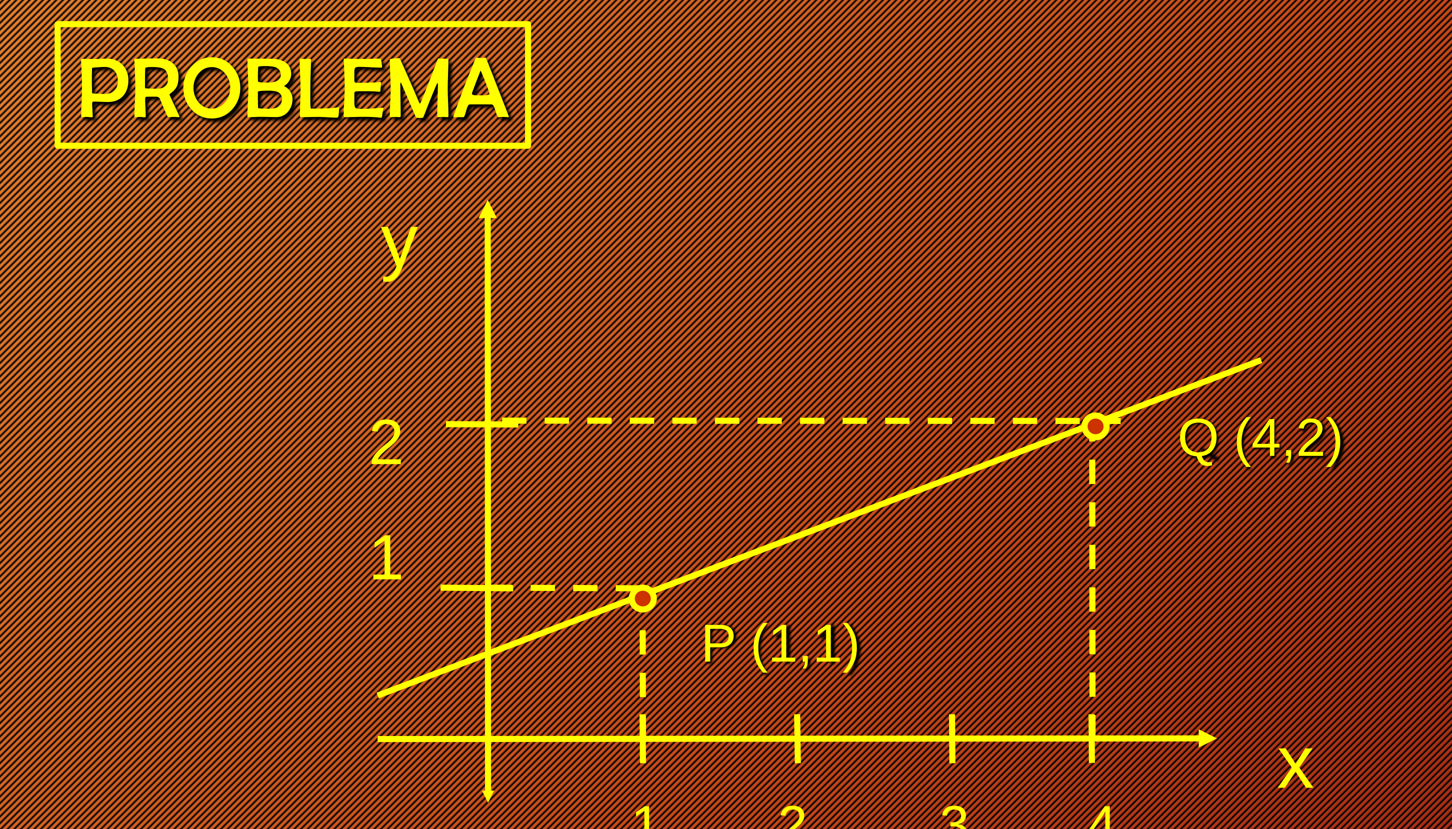
x=1 $x + y - z = 0$ $\quad$ $x = 1$

y=1 $y + 2z = 5$ $\quad$ $y = 1$

z=2 $2z = 4$ $\quad$ $Z = 2$

SOLUCION

PROBLEMA



Halle la Ecuación de la recta

$y = mx + b$

que pasa por los puntos P(1,1) y Q(4,2)

SOLUCION : Hallar la pendiente m y el término independiente b

x	y
1	1
4	2

1 1

↓ ↓

$y = m x b$ ⟷ $1 = m + b$

↑ ↑

2 4 ⟷ $2 = 4m + b$

SOLUCION

$1 = m + b$ $\quad\quad$ $m + b = 1$

$2 = 4m + b$ $\quad\quad$ $4m + b = 2$

Resuelva el sistema de ecuaciones
en las variables m y b.

SOLUCION MATRICIAL

$$m + b = 1$$
$$4m + b = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_2 - 4F_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

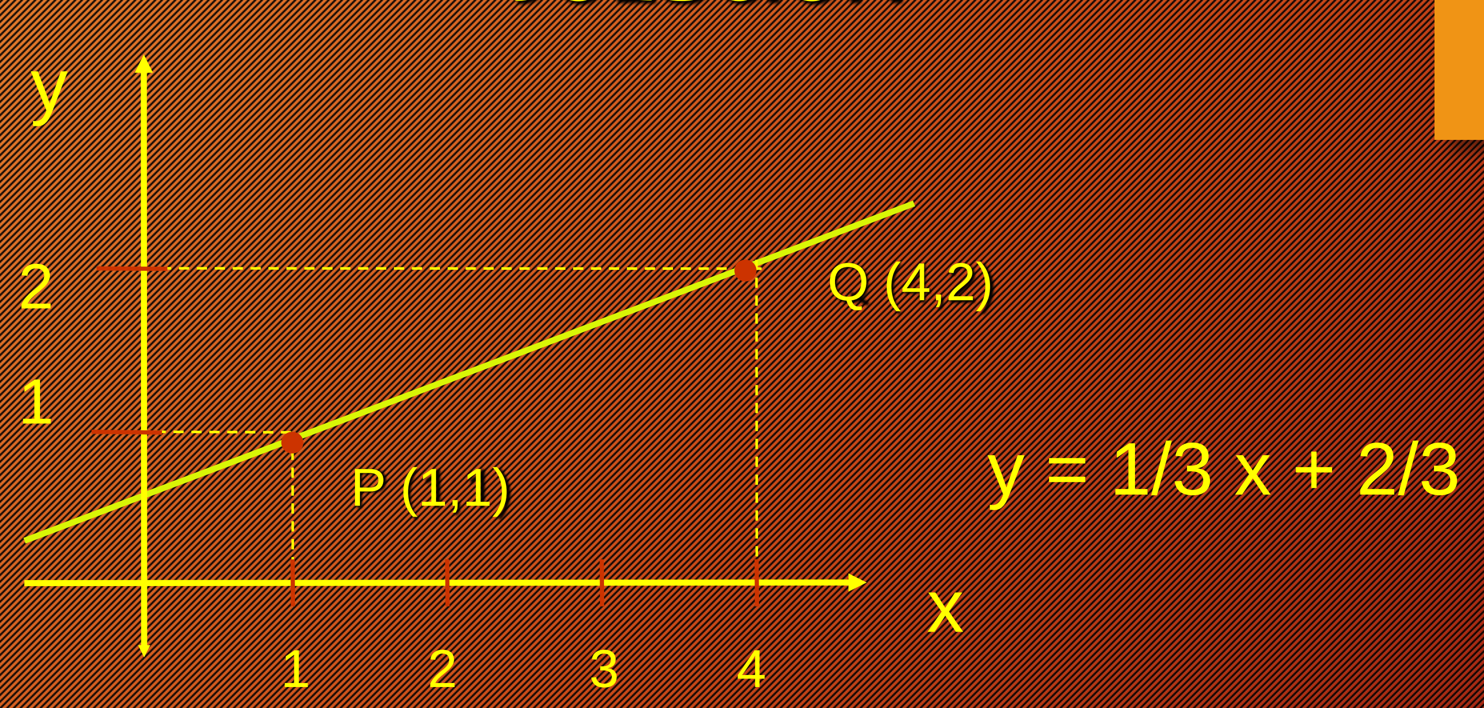
MATRIZ AUMENTADA

SOLUCION

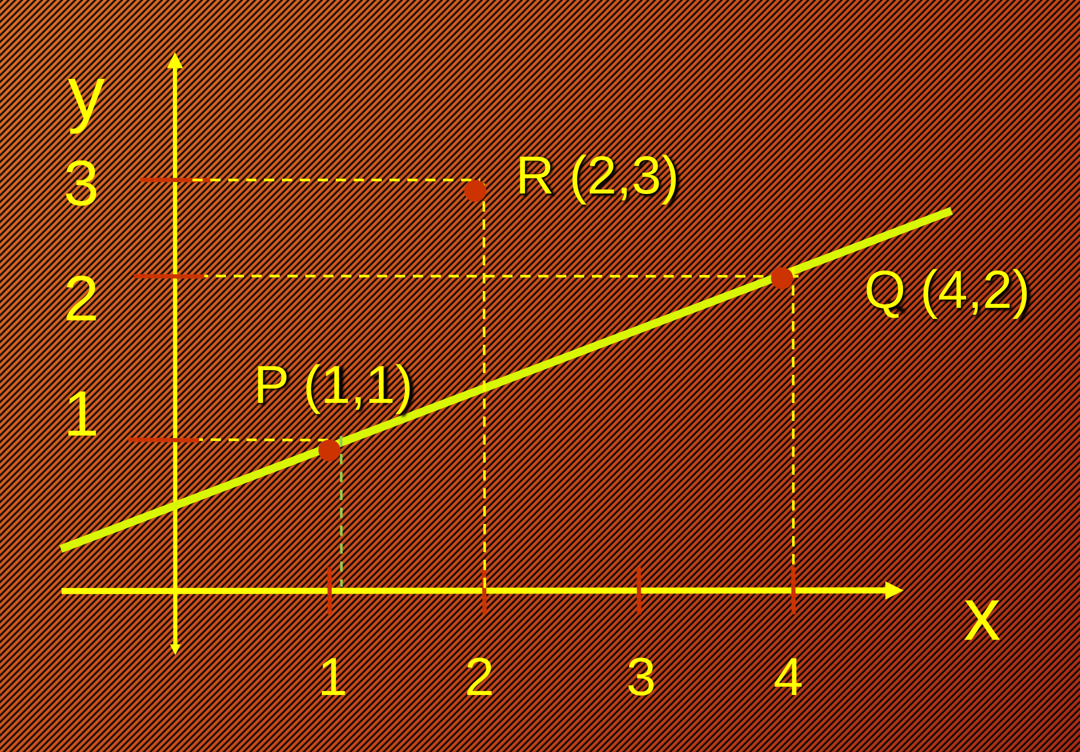
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \cong \begin{array}{l} \overset{1/3}{m} + b = 1 \\ \quad -3\underset{2/3}{b} = -2 \end{array} \quad \therefore \quad m = 1/3 \; , \; b = 2/3$$

$$y = mx + b \quad \cong \quad y = 1/3\,x + 2/3$$

SOLUCION



PROBLEMA



Halle la Ecuación de la recta

$y = mx + b$

que pase por los puntos P(1,1),Q(4,2) y R(2,3)

SOLUCION

x	y
1	1
4	2
2	3

1 2 3 1 4 2

$$y = mx + b$$

$$m + b = 1$$
$$4m + b = 2$$
$$2m + b = 3$$

RESUELVA

$$m + b = 1$$
$$4m + b = 2$$
$$2m + b = 3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

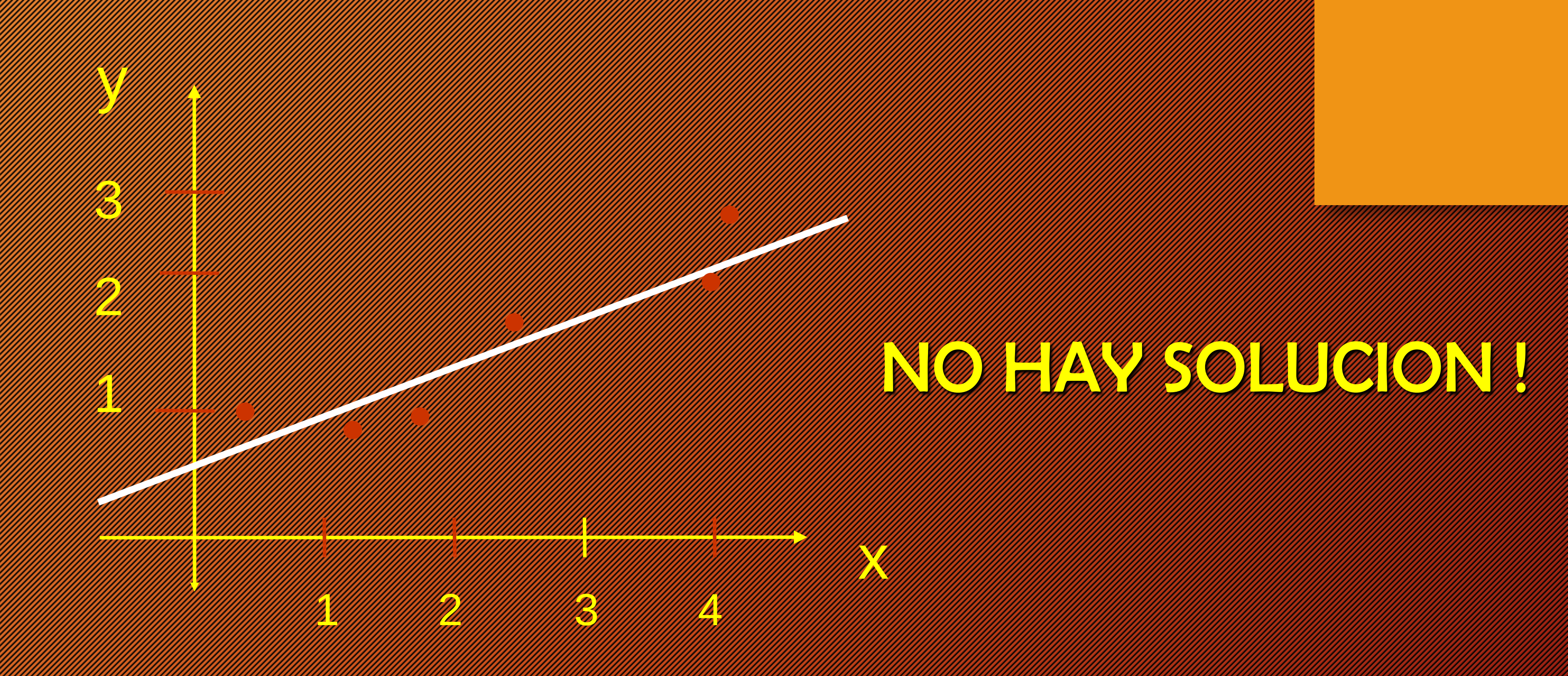
MATRIZ AUMENTADA

LUEGO

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \cong \begin{array}{r} m + b = 1 \\ -3b = -2 \\ 0b = -5 \end{array}$$

IMPOSIBLE !

NO HAY SOLUCION !


y
3
2
1
x
1
2
3
4
NO HAY SOLUCION !

OTRA EXPRESION MATRICIAL DEL PROBLEMA

$m + b = 1$
$4m + b = 2$
$2m + b = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

Se parace en algo a 2 x = 6 ...?

LAS MATRICES SIMPLIFICAN EL PROBLEMA

Tenemos una sola incognita Matricial $AX = B$

$$X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$$

Eureka:

Por favor: Diferencie la incognita b, de B

EL PROBLEMA SE REDUCE A RESOLVER LA ECUACION MATRICIAL

$$A\,X = B \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \overset{?}{\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CUANDO NO PUEDA RESOLVER

$$AX = B$$

HALLE UNA SOLUCION UTILIZANDO

REGRESION LINEAL

REGRESION LINEAL

EN LUGAR DE RESOLVER   RESUELVA

$$AX = B \qquad A^T A X = A^T B$$

VEAMOS

$$A \quad X = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T \quad A \quad X = A^T \quad B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCION POR REGRESION

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A^T A X A^T B

SISTEMA MATRICIAL RESULTANTE

$$\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$21m + 7b = 11$$
$$7m + 3b = 4$$

REGRESION LINEAL !

EN LUGAR DE RESOLVER !

$m + b = 1$

$4m + b = 2$

$2m + b = 1$

$A X = B$

SOLUCION POR REGRESION

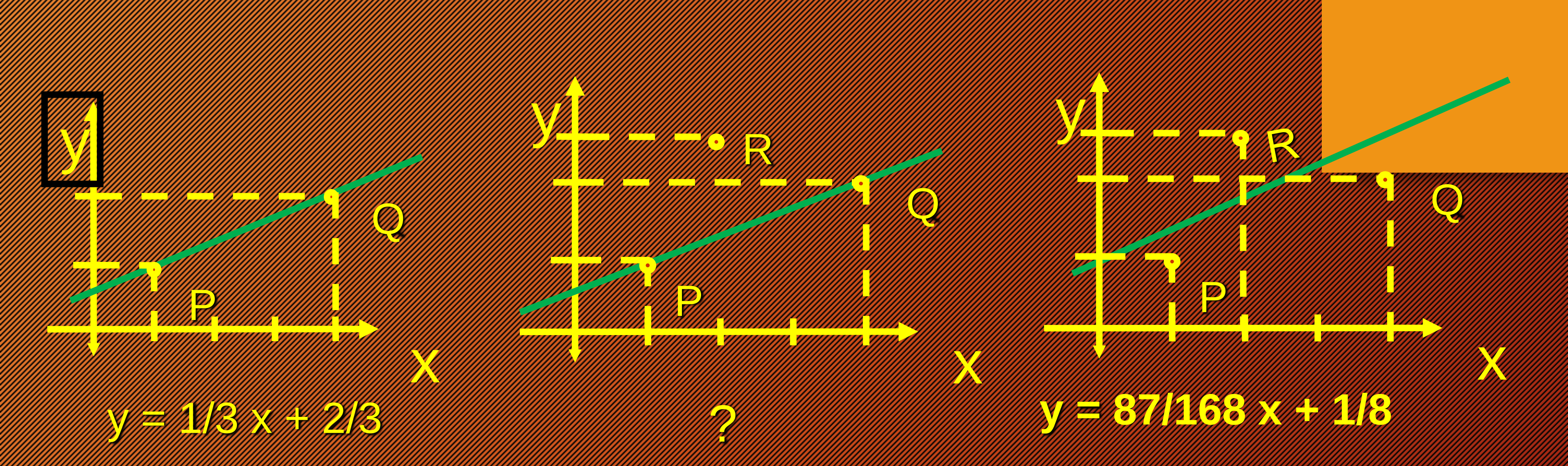
RESUELVA

$21m + b = 11$

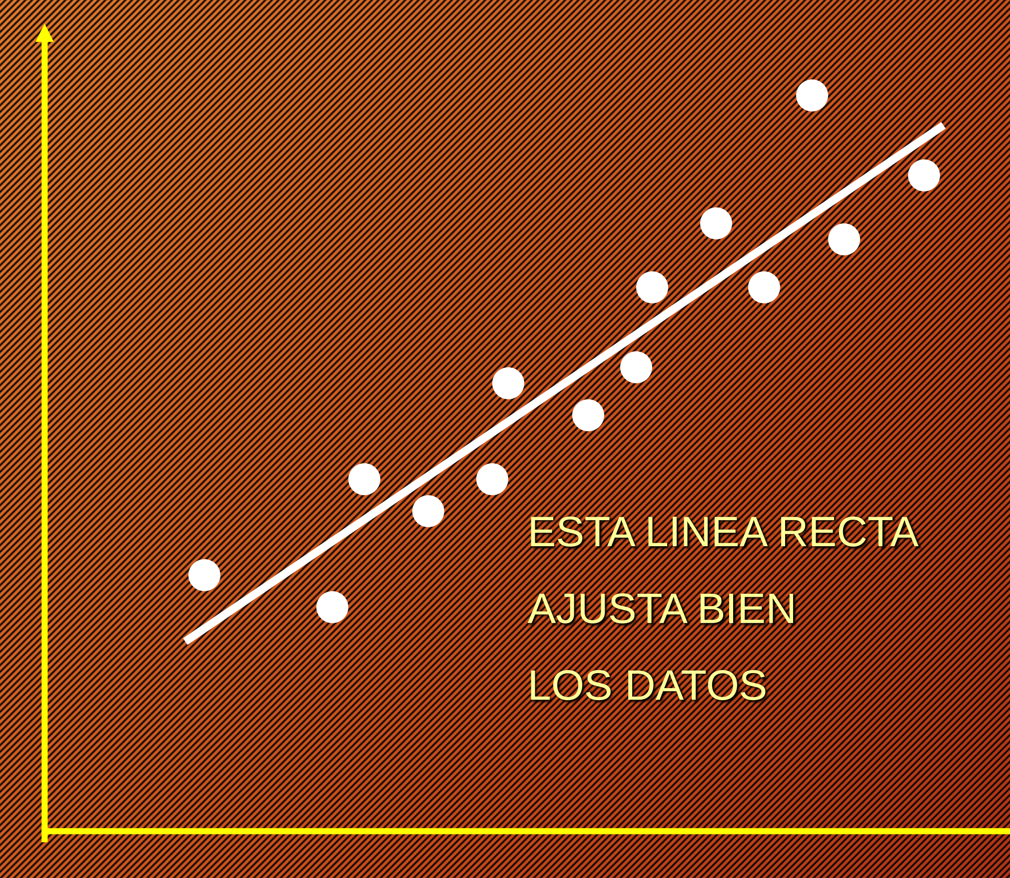
$7m + 3b = 4$

$m = 87/168$ $b = 1/8$

$y = mx + b$ $y = 87/168x + 1/8$


y
Q
P
X
y = 1/3 x + 2/3
y
R
Q
P
X
?
y
R
Q
P
X
y = 87/168 x + 1/8

DIAGRAMAS DE DISPERSION





Webster : Estadística aplicada a los negocios y a la economía. Pág. 326

DIAGRAMAS DE DISPERSION

UNA RELACION CURVILINEA

ESTA LINEA RECTA PROPORCIONA

UN AJUSTE DEFICIENTE



Webster : Estadística aplicada a los negocios y a la economía. Pág. 326

DIAGRAMAS DE DISPERSION

NO EXISTE NINGUNA RELACION FUNCIONAL ENTRE X y Y



Webster : Estadística aplicada a los negocios y a la economía. Pág. 326

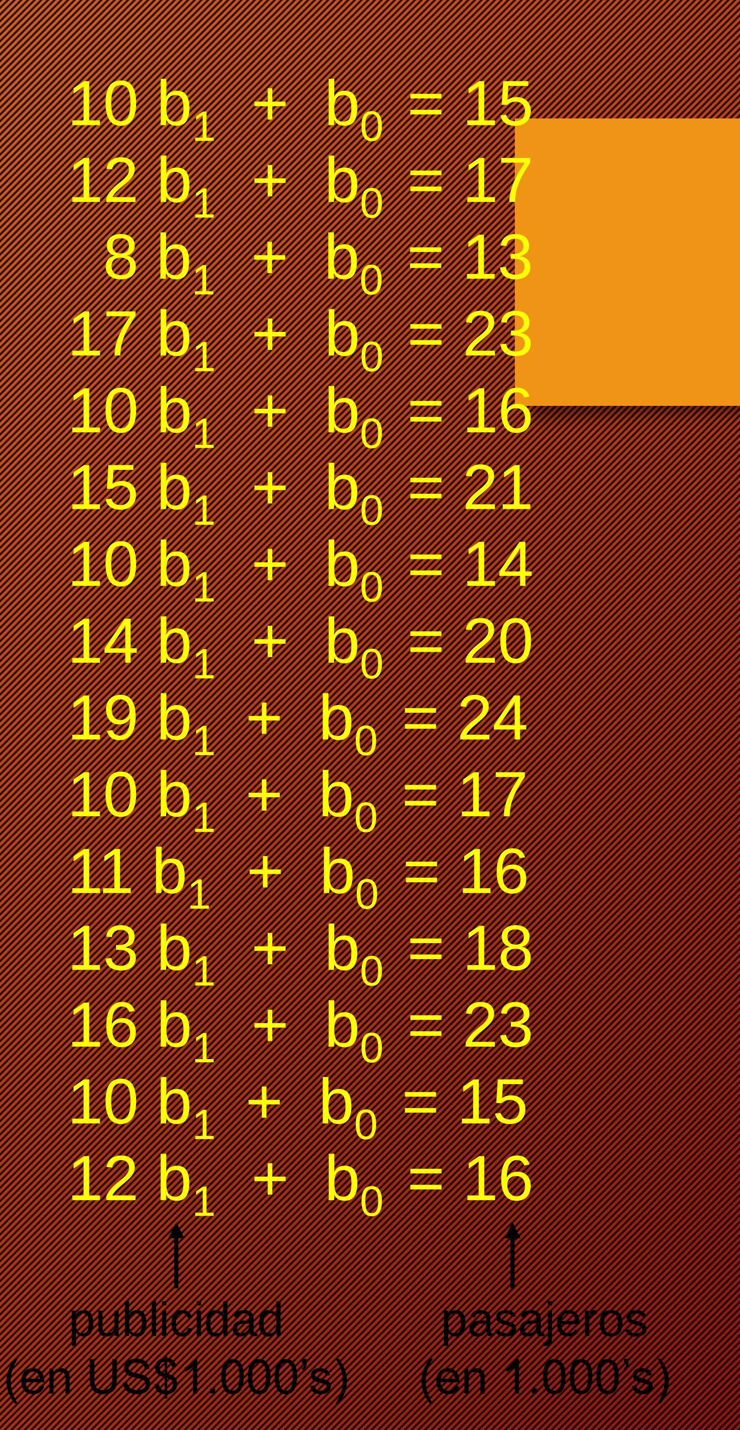
DATOS DE REGRESIÓN PARA HOP SCOTCH AIRLINES

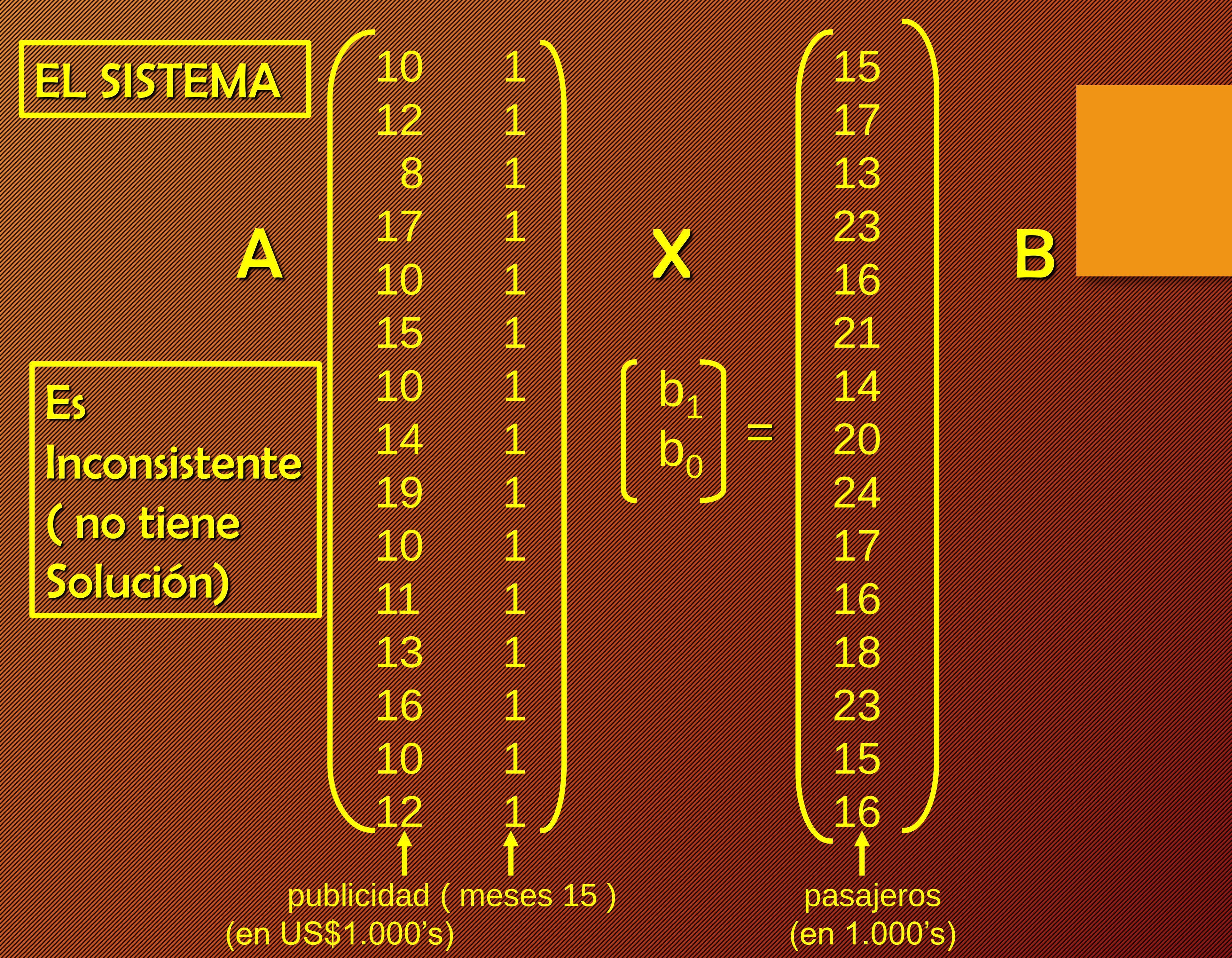
OBSERVACION (Mes)	Publicidad (en US$1.000's) (X)	Pasajeros (en 1.000's) (Y)	XY	X^2	y^2
1	10	15	150	100	225
2	12	17	204	144	289
3	8	13	104	64	169
4	17	23	391	289	529
5	10	16	160	100	256
6	15	21	315	225	441
7	10	14	140	100	196
8	14	20	280	196	400
9	19	24	456	361	576
10	10	17	170	100	289
11	11	16	176	121	256
12	13	18	234	169	324
13	16	23	368	256	529
14	10	15	150	100	225
15	12	16	192	144	256
	187	268	3499	2469	4960

AL ASUMIR QUE LA RELACION FUNCIONAL ENTRE PASAJEROS Y PUBLICIDAD ES DEL TIPO

$$\underset{(\#)}{\text{pasajeros}} = b_1 \times \underset{(\$)}{\text{publicidad}} + b_0$$

REEMPLAZANDO LOS DATOS ESTADISTICOS OBTENEMOS:




EL SISTEMA
A
X
B
Es Inconsistente (no tiene Solución)
10 1
12 1
8 1
17 1
10 1
15 1
10 1
14 1
19 1
10 1
11 1
13 1
16 1
10 1
12 1
b1
b0
=
15
17
13
23
16
21
14
20
24
17
16
18
23
15
16
publicidad (meses 15)
(en US$1.000's)
pasajeros
(en 1.000's)

REGRESION LINEAL

EN LUGAR DE

$$A X = B$$

RESOLVEMOS

$$A^T A X = A^T B$$

$$A^T$$

pu

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 & 17 & 10 & 15 & 10 & 14 & 19 & 10 & 11 & 13 & 16 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

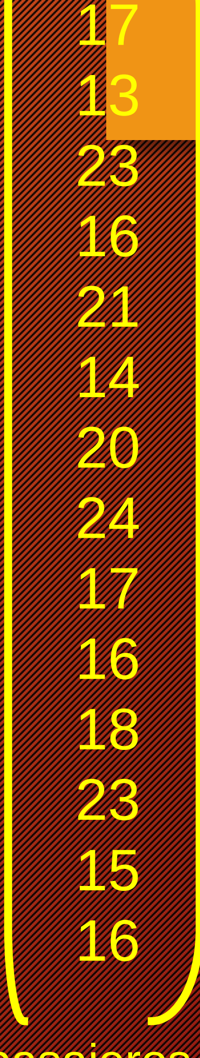
$$= \begin{bmatrix} \sum p^2u & \sum pu \\ \sum pu & \# \text{ meses} \end{bmatrix}$$

$$A$$

pu

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 12 & 1 \\ 8 & 1 \\ 17 & 1 \\ 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \\ 19 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 13 & 1 \\ 16 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 & 17 & 10 & 15 & 10 & 14 & 19 & 10 & 11 & 13 & 16 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 13 \\ 23 \\ 16 \\ 21 \\ 14 \\ 20 \\ 24 \\ 17 \\ 16 \\ 18 \\ 23 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

pasajeros

RESOLVEREMOS

$$\begin{bmatrix} \sum p^2u & \sum pu \\ \sum pu & \#\ meses \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum pu \ .\ pa \\ \sum pa \end{bmatrix}$$

O SEA :

$$\begin{bmatrix} 2469 & 187 \\ 187 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3490 \\ 268 \end{bmatrix}$$

Luego $b_1 \approx 1.08$ y $b_0 \approx 4.40$

Por lo tanto :

Pa =1,08 Pu + 4,40
(#) ($)

Ver Webster Pág 333

Pa =1,08 Pu + 4,40

(#)   ($)



Ver Webster Pág 333

DATOS DE REGRESION MULTIPLE PARA HOP SCOTCH AIRLINES

OBSERVACION (Meses)	Pasajeros (en 1.000's) (Y)	Publicidad (en US$1.000's) (X_1)	Ingreso nacional (en billones de dolares (X_2)
1	15	10	2.40
2	17	12	2.72
3	13	8	2.08
4	23	17	3.68
5	16	10	2.56
6	21	15	3.76
7	14	10	2.24
8	20	14	3.20
9	24	19	3.84
10	17	10	2.72
11	16	11	2.07
12	18	13	2.33
13	23	16	2.98
14	15	10	1.94
15	16	12	2.17

$Pa = b_2\,pu + b_1\,I_n + b_0 \qquad b_2, b_1, b_0$?

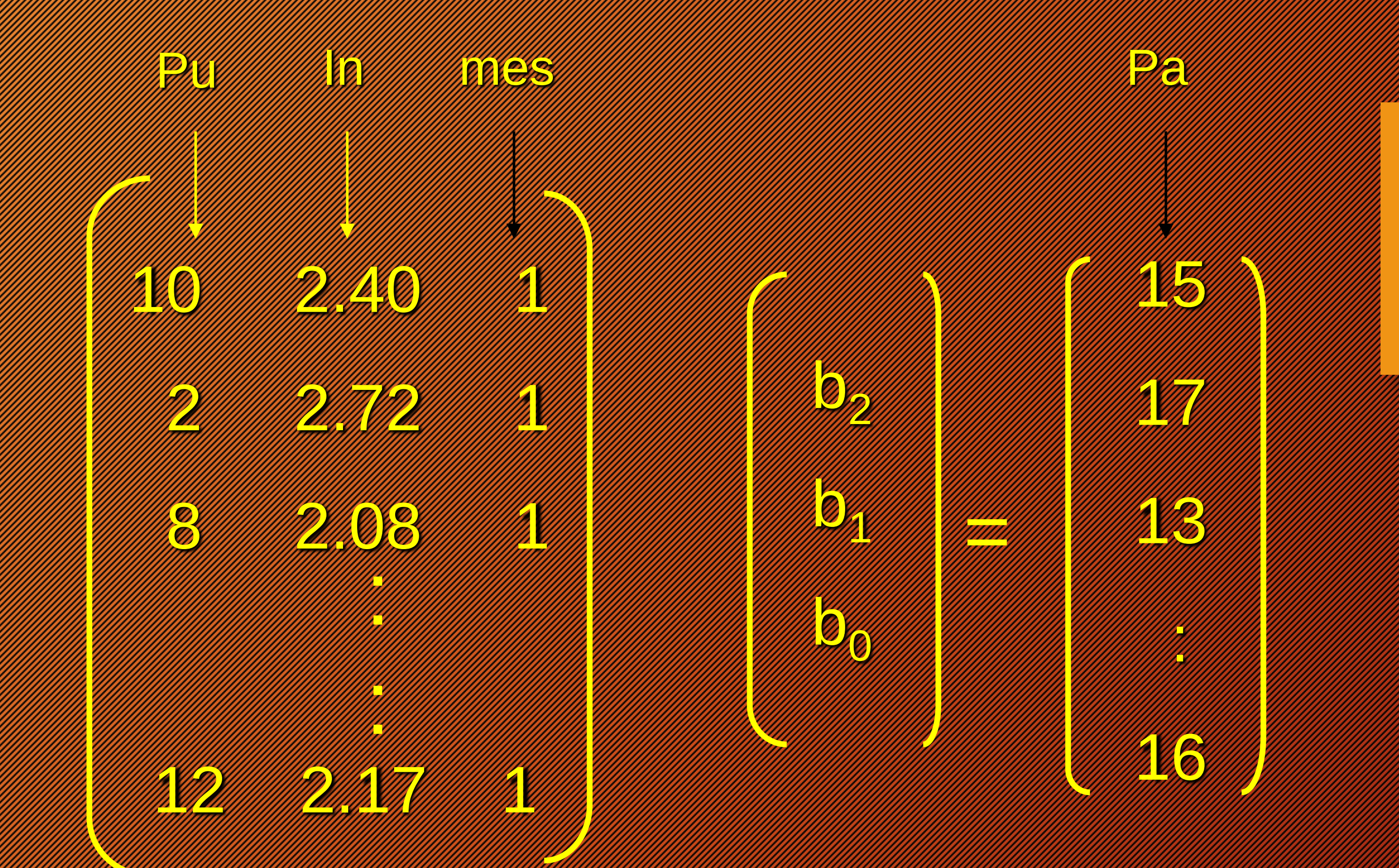
SUSTITUYENDO:

$$10b_2 + 240\,b_1 + b_0 = 15$$
$$12b_2 + 272\,b_1 + b_0 = 17$$
$$8b_2 + 2.08\,b_1 + b_0 = 13$$

:   :

:   :

$$12b_2 + 2.17\,b_1 + b_0 = 16$$



$$A X = B$$

$$A^T AX = A^T B$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 2.40 & 1 \\ 2 & 2.72 & 1 \\ 8 & 2.08 & 1 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ 12 & 2.17 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 13 \\ \vdots \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

$$AX = B$$

$$A^T A X = A^T B$$

$$
\begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & \dots & 12 \\ 2.40 & 2.72 & 2.08 & \dots & 2.17 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 10 & 2.40 & 1 \\ 12 & 2.72 & 1 \\ 8 & 2.08 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 12 & 2.17 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & \dots & 12 \\ 2.40 & 2.72 & 2.08 & \dots & 2.17 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 13 \\ \vdots \\ 16 \end{pmatrix}
$$

$$A^T A X = A^T B$$

$$
\begin{pmatrix} \sum pu^2 & \sum pu.In & \sum pu \\ \sum In.pu & \sum .In^2 & \sum In \\ \sum pu & \sum In & \#\ meses \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \sum pu \times pa \\ \sum In \times pa \\ \sum pa \end{pmatrix}
$$

SOLUCION:

- $Pa = 0{,}84Pu + 1{,}44\,In + 3{,}53$



Webster : Estadística aplicada a los negocios y a la economía. Pág. 379